Choix des projets d'investissements par les fonctions d'utilité

Application à des projets en exploration production

Emilie Muzereau

emilie.muzereau@gdfsuez.com

12/02/2015

Avertissement

Le contenu de ce document n'engage que la responsabilité de son auteur et ne représente pas l'opinion de GDF SUEZ ni de ses filiales.
GDF SUEZ n'est pas responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations qui y figurent.

Pourquoi parler d'un tel sujet ?

Dans ma boite mail arrive un sujet qui parait intéressant, utile., informatif...

Un mathématicien détermine... à quelle heure il faut arriver à l'aéroport

Fini d'être constamment tiraillé entre la peur de rester cloué au sol et celle d'une attente interminable dans le terminal. Lire

Un clic, et puis...

Des souvenirs de l'université ...

> Quel est le meilleur moment pour se rendre à l'aéroport ? Cela dépend à quel point vous détestez y attendre et jusqu'à quel point vous prendrez le risque de louper votre avion. Cependant, si cela ne vous est jamais arrivé, c'est probablement que vous vous présentez trop tôt.
>
> Jordan Ellenberg, professeur de mathématiques à l'université du Wisconsin explore ce problème et bien d'autres encore dans son nouveau livre intitulé "How Not To Be Wrong: The Power Of Mathematical Thinking", un recueil d'exemples fascinants sur les maths et ses applications surprenantes.
>
> Voici le résumé de l'explication de Jordan au sujet du problème que pose l'arrivée à l'aéroport.
>
> Le sujet implique l'utilité attendue. L'utilitarisme est un concept économique utilisé pour analyser les coûts et les bénéfices de différentes marchandises et prestations pour différentes personnes. L'idée est d'attribuer une valeur quantitative à l'utilité présentée par une notion aux yeux de quelqu'un, donnant la possibilité d'analyser les choix de cette personne.

$\Rightarrow$ Section 1 : Eléments de décision dans l'incertain

… et puis la déception !

Déterminer à quel moment se rendre à l'aéroport nécessite de faire un compromis : plus tôt vous vous y rendrez, plus vous serez susceptible d'attraper votre vol. Mais cela implique également un coût au niveau du temps passé à l'aéroport plutôt qu'à un autre endroit.

Ne désespérez plus : les attentes sans fin, c'est fini ! © Patryk Kosmider - Fotolia.com

Le concept d'utilitarisme nous permet de quantifier cela. Disons que chaque heure passée à l'aéroport vous coûte 10 "utilités" ou unités d'utilité et que rater votre avion vous coûte 50 utilités. En d'autres mots, louper l'avion est environ cinq fois aussi contrariant que l'ennui accumulé en passant une heure à l'aéroport.

Nous savons aussi que plus tard vous vous présentez à l'aéroport, plus vous avez de chances de manquer votre vol. Si vous y allez une demi-heure plus tôt, vous avez 20% de chances de rater l'avion; une heure plus tôt vous donne 5% de chances et deux heures vous laissez 1% de chances de le rater.

⇒ Section 2 : Estimation de la fonction d'utilité pour un usage opérationnel

Section 1

Eléments de théorie de la décision en contexte incertain

Choix face au risque

La question du choix face au risque est un problème assez courant :

- Comment choisir entre 2 actifs/projets ? Par exemple :
  - Un projet/actif très rentable mais très risqué
  - Un projet/actif peu risqué, mais moins rentable
  - Eternelle question du choix entre rendement et risque...
- Cela dépend :
  - De l'aversion au risque
  - Du niveau de contrainte budgétaire
  - De la santé de l'entreprise
  - ...

Ce problème est depuis longtemps étudié en économie via la théorie de la décision

Un exemple de choix face au risque

Supposons que nous nous trouvions face aux choix suivants :

	Etat 1	Etat 2	Etat 3
Probabilité	0.5	0.3	0.2
Action 1	6 euros	5 euros	2 euros
Action 2	5 euros	6 euros	1 euro
Action 3	9 euros	6 euros	0 euro

Solutions non probabilistes I

- Le "MAXIMAX"
  - But : Maximiser l'action la plus favorable

	Etat 1	Etat 2	Etat 3	Maximum
Action 1	6 euros	5 euros	2 euros	Etat 1 : 6 euros
Action 2	5 euros	6 euros	1 euro	Etat 2 : 6 euros
Action 3	9 euros	6 euros	0 euro	Etat 1 : 9 euros

  - On choisira **l'Action 3**.

Solutions non probabilistes II

- Le "MAXIMIN" ou "MINIMAX" ou "critère de Wald"
  - But : Maximiser le bénéfice minimal ou Minimiser la perte maximale

	Etat 1	Etat 2	Etat 3	Minimum
Action 1	6 euros	5 euros	2 euros	Etat 3 : 2 euros
Action 2	5 euros	6 euros	1 euro	Etat 3 : 1 euro
Action 3	9 euros	6 euros	0 euro	Etat 3 : 0 euro

  - On choisira **l'Action 1**.

Solutions non probabilistes III

- Le "MINIMAX" du Regret
  - Un gestionnaire "regrettera" sa décision si l'état qui se réalise conduit à un meilleur résultat avec une hypothèse alternative
  - On doit construire la matrice des "regrets", qui décrit les différences entre le meilleur résultat pour un scénario et le résultat de l'action sélectionnée
  - But : Minimiser le regret maximal

	Etat 1	Etat 2	Etat 3	Maximum
Action 1	9-6= 3	6-5= 1	2-2= 0	Etat 1 : 3 euros
Action 2	9-5= 4	6-6= 0	2-1= 1	Etat 1 : 4 euros
Action 3	9-9= 0	6-6= 0	2-0= 2	Etat 3 : 2 euros

  - On choisira **l'Action 3**, qui minimise le regret.

Solutions probabilistes I

Cette fois-ci, on va faire intervenir les probabilités d'occurrence des états dans le choix final

- La minimisation du futur le plus probable
  - But : Maximiser le gain dans l'état le plus probable
  - Etat 1 le plus probable $\rightarrow$ Choisir l'**Action 3**
- La maximisation de la valeur espérée ou règle de Bayes
  - But : Maximiser la valeur espérée

Probailité	Etat 1 0.5	Etat 2 0.3	Etat 3 0.2	Espérance
Action 1	6	5	2	6*.5+5*.3+2*.2=4.9
Action 2	5	6	1	4.5
Action 3	9	6	0	6.7

  - On choisira l'**Action 3**.

Solutions probabilistes II

- La minimisation du regret espéré
  - Similaire au minimax du regret, mais en tenant compte des probabilités dans cette matrice des regrets

	Etat 1	Etat 2	Etat 3	Espérance
A1	3	1	0	3*.5+1*.3+0*.2=1.8
A2	4	0	1	2.2
A3	0	0	2	0.4

  - On choisira l'**Action 3**.
- Autres critères :
  - Minimisation de la variance
  - Des critères qu'il faut calibrer : espérance-variance, fonctions d'utilité...

La théorie de l'espérance d'utilité

- Idée sous-jacente :
  - Il n'est pas forcément équivalent
    - de gagner 1000 euros de manière certaine
    - ou de jouer à un jeu avec une chance sur 100 de gagner 100 000 euros, rien sinon.
  - L'espérance mathématique échoue à bien décrire le comportement des agents face à un choix risqué ou une "loterie".
- Une solution pour représenter ce comportement face au risque est d'utiliser les **fonctions d'utilité**
- L'utilité est une mesure du bien-être ou de la satisfaction obtenue par la consommation, ou du moins l'obtention, d'un bien ou d'un service.

Hypothèses sur la fonction d'utilité

- Maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire
- Caractéristiques frquentes de la fonction d'utilité :
  - Elle est toujours **croissante** : une augmentation de la quantité d'un bien dans un panier augmente ou laisse inchangée l'utilité retirée de ce panier
  - Elle est **concave** : l'utilité de chaque nouvelle unité de bien est inférieure à celle de la précédente (utilité marginale décroissante)
- Aversion au risque :
  - L'insatisfaction liée à une perte est plus grande que la satisfaction tirée d'un gain de même montant.

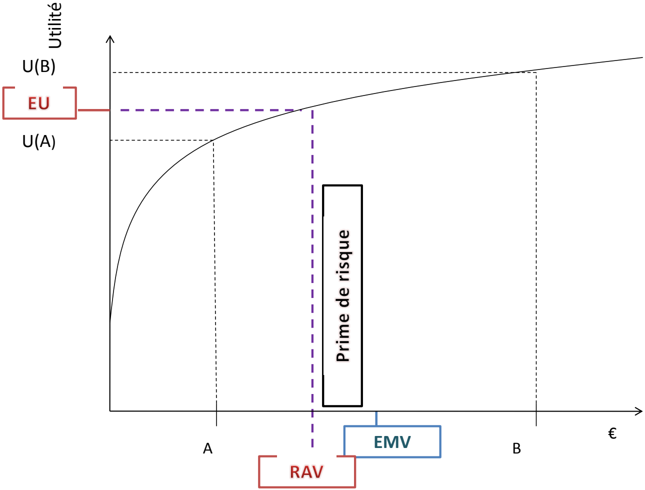
Utilisation de la fonction d'utilité I

- Supposons que l'on connaisse :
  - la fonction d'utilité U
  - la probabilité de succès π
  - les valeurs en cas de succès/perte

Utilisation de la fonction d'utilité II

- On peut alors calculer :
  - La valeur moyenne du projet
    $\rightarrow$ **EMV : Expected Mean Value**
  - L'utilité retirée dans chacun des états
  - L'utilité espérée, ou espérance d'utilité
    $\rightarrow$ **EU : Expected Utility**
  - La somme que l'on serait prêt à payer/accepter, pour obtenir de manière certaine cette espérance d'utilité : l'**Equivalent Certain** ou **Valeur Ajustée du Risque**
    $\rightarrow$ **RAV = Risk-Adjusted Value**
  - La prime de risque

Utilisation de la fonction d'utilité : graphique



Utilisation de la fonction d'utilité I

- Détails des calculs
  - Expected Mean Value : EMV=π*A + (1-π)*B
  - Expected Utility : EU = π*U(A) + (1-π)*U(B)
  - Risk Ajusted Value : RAV=U^{-1}(EU)
  - Risk Premium : RP = EMV - RAV
- Un critère de décision : si RAV $\geq$ 0, on investit !

Utilisation de la fonction d'utilité II

- Quelle fonction d'utilité ?
  - Elle dépend du comportement attendu

Fonction	Aversion au risque	Tolérance au risque
Logarithme	Décroissante	Croissante
Exponentielle	Constante	Constante
Puissance	Décroissante	Croissante
Quadratique	Croissante	Décroissante
HARA	Hyperbolique	Linéaire

  - Elle doit être calibrée pour une entreprise, un département...

Section 2

Estimation de la fonction d'utilité dans le cas de projets en exploration - production

Projets et RAV en exploration production

Lorsque l'on connait la fonction d'utilité U, et qu'on est face à un projet d'investissement ayant :

- une probabilité π de succs
- une valeur en cas de succès notée NPV (Net Present Value)
- une valeur en cas d'échec notée $-DHC$ (Dry Hole Cost)

la valeur corrigée du risque est égale à :

$$\begin{aligned} RAV &= U^{-1}\left[\pi U(NPV) + (1-\pi)U(-DHC)\right] \\ &= \text{Valeur espérée du projet - prime de risque} \end{aligned}$$

On investit dès lors que $RAV \geq 0$

Fonction d'utilité retenue

Il est fréquent de prendre en considération une fonction d'utilité exponentielle

$$U(X) = RT\left(1 - e^{\frac{-X}{RT}}\right)$$

où RT désigne la tolérance au risque.

- Avantages :
  - Elle présente de bonnes propriétés :
    - économiques : utilité croissante et concave, aversion pour le risque constante
    - et mathématiques : formule fermée et additivité de la valeur
  - Elle est simple à estimer car fonction de la seule tolérance au risque
- Inconvénient : elle pénalise les projets de grande envergure.

Réalisation d'un sondage

Un sondage est réalisé périodiquement auprès des managers de la Direction Exploration, auxquels on propose, en restant proche de la réalité :

- 10 projets fictifs
- un budget fictif qu'ils peuvent dépenser entièrement ou pas

Les sondés doivent donner la somme qu'ils accordent à chacun des projets. On calcule alors :

- la tolérance au risque de chaque individu
- une tolérance au risque agrégée

Estimation de la tolérance au risque

Soit ω le pourcentage "optimal" d'un projet dans lequel un individu investit.
Par définition,

$$U(RAV) = \mathbb{E}[U(X)] = \pi RT \left(1 - e^{\frac{-\omega NPV}{RT}}\right) + (1-\pi)RT\left(1 - e^{\frac{\omega DHC}{RT}}\right)$$

$$\Rightarrow RAV = -RT \ln\left[\pi e^{\frac{-\omega NPV}{RT}} + (1-\pi)e^{\frac{\omega DHC}{RT}}\right]$$

La maximisation de la RAV par rapport à ω donne le résultat suivant :

$$RT = \omega(DHC + NPV)\left[\ln\left(\frac{\pi}{1-\pi}\frac{NPV}{DHC}\right)\right]^{-1}$$

On peut donc déduire la fonction d'utilité à partir des poids du sondage.

Agrégation des tolérances au risque par individu et au sein du groupe

- Pour chaque décideur i, on calcule :
  - la tolérance au risque médiane parmi les projets évalués
  - un indice de cohérence des décisions d'un agent

$$CM_i = \frac{\sigma(RT_i)}{mediane(RT_i)}$$

jugée faible si elle est supérieure à 3.5

- La tolérance au risque de la firme est égale à la moyenne (pondérée ou pas) des tolérances au risque individuelles

ou directement la médiane pour tout projet et tout décideur.

Les améliorations au cours du temps

- Prise en compte de deux tolérances au risque selon la taille du projet
- Evaluation d'autres fonctions d'utilité de type HARA, qui prennent en compte plusieurs paramètres et requièrent une estimation numérique
- Fonctions d'utilité bi-attributs (valeur & volume)

mais la méthode a été abandonnée :-(

Le cas particulier du critère Espérance-Variance

- Le critère Moyenne - Variance ou Espérance - Variance
  - Critère probabiliste favorisant la décision qui a l'espérance corrigée d'une partie de la variance la plus élevée possible
  - X_i^* tel que $E(X_i^*) - \frac{\alpha}{2} * V(X_i^*) > E(X_i) - \frac{\alpha}{2} * V(X_i), \forall i^* \neq i$ avec α coefficient d'aversion pour le risque
  - Moins général que le critère d'espérance d'utilité, à calibrer
- Lien entre maximisation de l'espérance d'utilité et maximisation de l'Espérance-Variance
  - Pour de "petits" risques, d'après PRATT :
    RAV $\simeq$ E(X)-$\frac{\alpha}{2}$*V(X)
  - Si U est une exponentielle négative et X suit une loi normale, on a toujours l'équivalence

Bibliographie

- Lerche, Ian & John A. MacKay (1999) : Economic risk in Hydrocarbon Exploration
- Davis, R.E. (2001), Decision Policy Optimization via Certainty Equivalent Functions for Exponential Utility, Advances in Mathematical Programming and Financial Analysis, 6, 89-113